Advances in Cognitive Sceince
Vol. 15, No. 1, 2013

فصلنامه تازه‌های علوم شناختی
سال ۱۵، شماره۱، بهار۱۳۹۲

بررسی تأثیر تدریس بر میزان درک دانش‌آموزان دختر سال سوم ریاضی از مفهوم حد و رشد توانایی فضایی آنها با تأکید برفعالیت‌های مبتنی بر تجسم

ابراهیم ریحانی
استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
شهرناز بخشعلی‌زاده *
کارشناس پژوهشی پژوهشگاه مطالعات وزارت آموزش و پرورش
کامل نظری
دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

***نشانی تماس:** سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، پژوهشگاه مطالعات
رایانامه: sbakhshalizadeh@yahoo.com

هدف: بخش مهمی از درک و تفکر دانش‌آموزان از ریاضیات از طریق تجسم شکل می‌گیرد. مفهوم "حد" در ریاضی از جایگاهی خاص برخوردار است. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در درک این مفهوم با مشکلات و چالش‌های فراوانی روبرو هستند. به نظر می‌رسد تکیه بر آموزش رویه‌ای می‌تواند یکی از عوامل مؤثر بر این امر باشد. تحقیق حاضر در پی آن است که تأثیر آموزش مفهوم "حد" به کمک رویکرد تجسم محور بر درک دانش‌آموزان و نیز توانایی فضایی آنها را بررسی کند. **روش:** جامعهٔ مورد مطالعه در این تحقیق، دانش‌آموزان دختر سال سوم دبیرستان در رشته ریاضی- فیزیک دو شهرستان استان کردستان و نمونهٔ آن ۳۴ دانش‌آموز سال سوم ریاضی هستند.

از آنجا که دانش‌آموزان قبلاً در دو کلاس گنجانده شده بودند و پژوهشگران این مطالعه امکان انتخاب تصادفی آنها را برای دو گروه کنترل و آزمون نداشتند، از طرح نیمه‌آزمایشی پیش‌آزمون- پس‌آزمون با گروه کنترل استفاده شد؛ بدین صورت یکی از کلاس‌ها به صورت تصادفی گروه آزمون و دیگری گروه کنترل درنظر گرفته شد. در این مطالعه، روش تدریس به عنوان متغیر مستقل و توانایی فضایی و درک مفهوم حد نیز متغیرهای وابسته در نظر گرفته شدند. پیش‌آزمون نشان داد که دو گروه قبل از اعمال متغیر مستقل، از نظر متغیرهای وابسته تفاوت معناداری نداشتند. در طول سه هفتهٔ آموزشی، مفهوم حد را یکی از مؤلفان مقاله به هر دو گروه آموزش داد. شیوهٔ تدریس به گروه کنترل روش معمول و برای گروه آزمون با رویکرد تجسم‌محور، با ارائهٔ فعالیت‌های تصویری/ دیداری بود. این فعالیت‌ها به گونه‌ای طراحی شده بودند که بازنمایی‌های مختلف مفهوم حد در آنها ارائه شده بود. در تحلیل داده‌ها از روش "تحلیل واریانس چند متغیره" استفاده شد. **نتیجه گیری:** یافته‌های تحقیق نشان داد که تدریس از طریق ارائهٔ فعالیت‌های مبتنی بر تجسم از حد، بر درک دانش‌آموزان از مفهوم حد تأثیرگذار و تفاوت بین دو گروه در این مورد معنادار است. اما ارائهٔ فعالیت‌های مبتنی بر تجسم در تدریس حد، تأثیری بر افزایش توانایی فضایی دانش‌آموزان ندارد و از این نظر تفاوت دو گروه معنادار نیست.

واژه‌های کلیدی: مفهوم حد، بازنمایی های چندگانه، تفکر تجسم- محور، توانایی فضایی

The Effect of Visualization-Based Teaching Approach on Understanding the Concept of Limit and the Spatial Ability Amongst High School Students

Objective: An important part of students' understanding and thinking of mathematics is shaped through visualization. The concept of "limit" has a special place in mathematics. Researches have shown that students face problems and challenges in understanding this concept. It seems that relying on the procedural approach in teaching could be one of the factors affecting it, considering that in this approach, algorithmic thinking is mostly advanced. This study examines the effects of teaching based on visualization on students' understanding of the concept of "limit" and their spatial ability. **Method:** This study enrolled 32 female high school students (11th grade) majoring in mathematics – physics from two cities in Kordestan. Since students were already assigned in 2 classes, random sampling was not administered. We considered semi-experimental pre-test-post-test control group for this study. Randomly one of the classes was selected as the control group and other one as the experimental group. The teaching method was the independent variable and understanding the concept of 'limit' and spatial ability were dependent variables. The Pre-test indicated that there was no significant difference between two groups with regard to the dependent variables before intervening with the independent variable. During the three weeks of instruction, concept of 'limit' was taught to both groups. The control group was taught with a traditional approach whereas the test group was treated by visual-based approach accompanied with visualization activities. MANOVA was used to analyze the data. **Conclusion:** Our findings revealed that using visual activities in teaching the concept of 'limit', improves students' understanding of it and the difference between groups was statistically significant. This intervention however did not enhance the spatial ability of the students.

Keywords: *concept of limit, multiple-representations, visual-based approach, spatial ability*

Ebrahim Reyhani
Assistant professor, Department of Mathematics, Shahid Ragaee Teacher Training University
Shahrnaz Bakhshalizadeh*
Research officer, Research Institute for Education, Ministry of Education
Kamel Nazari
Masters degree student in Mathematics Education, Shahid Ragaee Teacher Training University

*Corresponding Author:
Email: sbakhshalizadeh@yahoo.com

مقدمه

امروزه رشــد و کاربست مهارت‌های تفکر و حل مسئله در محیــط کار و جهــان واقعی، از نیازهــای مهم جامعه اســت. در چنین جهانی، درک ریاضی فرصت‌هایی برای مواجهه با مسایل و حل آنها در اختیار افراد قرار می‌دهد. مطالعــات تجربی مختلف در مورد نقــش بازنمایی‌های بصری[1] در ریاضیات نشــان می‌دهند که تجارب بصری افراد مدت طولانی‌تری در حافظهٔ آنها می‌ماند و توانایی یادآوری آنها نیز راحت‌تــر از بازنمایی‌های نمادین و یا کلامی اســت (ریورا[2]، ۲۰۱۱). در ایــن ارتباط، هادامار[3] (نقــل از: جونــز[4]، ۲۰۰۱) بیــان کــرده که بســیاری از شــیوه‌های تفکر، که در ریاضیات ســطح بالا مورد نیاز اســت، از فضای طبیعــت الهام گرفته می‌شــوند، لذا به نظر می‌رســد تفکر بصری و فضایی[5] با مشاهدهٔ طبیعت و تجســم[6] اشیای هندســی و فضایی برگرفته از طبیعت رشــد می‌کند. به عقیدهٔ برخی محققان آموزش ریاضی، ریاضیات پشــت صحنه در مقایسه با ریاضیات پیش‌رو، بیشتر با ایده‌های بصری شکل گرفته است، به طوری که کار اغلــب ریاضیدانان با تجربه، خالی از تفکر مبتنی بر تجسم و استدلال‌های بصری[7] نیست (تال[8]، ۱۹۹۱).

بــه عقیدهٔ گینزبرگ[9] و همــکاران (۲۰۰۳، نقل از: ریورا، ۲۰۱۱)، ریاضیاتــی که کــودکان در محیط‌های فیزیکی و اجتماعــی اطراف خود با آن مواجه‌اند، ممکن اســت صــوری و نمادین یا شــهودی و یا اســاس آن تجارب اجتماعی و فرهنگی و یا تا میزان بســیار کم، حتی ممکن اســت رسمی شــده باشــد. (بنابراین حتی ریاضیاتی که کــودکان در بازی‌هــا و روابط با یکدیگر یــاد می‌گیرند می‌تواند در اســتدلال‌های آتی آنها به کار گرفته شــود. کودکــی را در نظر بگیرید که به بازی با برخی اشــیای نامرئی و خیالی مشغول است و در ذهن خود و با تجسم کردن، آنها را می‌شمارد. این فعالیت در حقیقت زمینه‌ساز تشــکیل مفهوم عدد در ذهن او خواهد بود. عمل تجسم در واقــع ترجمهٔ یــک رویداد خارجی به ذهنی اســت. تجســم، یک بازنمایی تصویری و تجســم کردن، فرایند ایجــاد یک نمایش تصویــری در ذهن و معمولاً مترادف تصویرســازی ذهنی اســت (فلیپس[10]، نوریس[11] و مک ناب[12]، ۲۰۱۰). فرآیند تجســم کردن در ریاضیات که به بررســی، کشــف و درک مفاهیم منجر می‌شود، مستلزم فرآیند تشــکیل و دســت‌کاری تصاویر بــا قلم و کاغذ، فن‌آوری و یا فرآیندی ذهنی است (جونز، ۲۰۰۱).

البته کاربســت روش‌های مبتنی بر تجســم در آموزش مفاهیــم ریاضــی، بــه ســادگی روش‌های دیگــر (مثلاً ســخنرانی) نیست، زیرا پیدا کردن نمونه‌های شهودی و مجسم از مفاهیم انتزاعی ریاضی، همواره آسان نیست. از این گذشته، به نظر می‌رسد بیشتر معلمان با به کارگیری این روش در آموزش مفاهیم ریاضی آشــنا نیســتند. اما مانکوســو[13] (۲۰۰۵) از عصر بازگشت به تفکر مبتنی بر تجسم یا رنســانس تفکر تجسم‌محور[14] در ریاضیات در طول دهه‌های اخیر سخن می‌گوید. به نظر وی این علاقه به تجســم در منطق و ریاضیات، یکی از نتایج تحولاتی اســت که در زمینه‌های مختلف، از جمله علوم کامپیوتر، ریاضیــات، آموزش ریاضی، روان‌شناســی شــناختی و فلسفه روی داده است. به عقیدهٔ مانکوسو (۲۰۰۵)، برای پــرورش تفکر بصری و تجســمی، دانش‌آموزان باید از دانش لازم برای درک نمودارها آگاه شوند تا بتوانند آنها را تفســیر و در حل مســایل ریاضی به کاربرند. به نظر تال (۱۹۹۱)، در حالت کلی، دانش‌آموزان برای تجســم مفاهیم ریاضی از مهارت‌های بسیار ضعیفی برخوردارند و اســتفاده از نمودارهــا، تصاویر، اشــکال هندســی و مدل‌ها نیــز می‌تواند راهی برای تصــور مفاهیم انتزاعی در ریاضیات باشــد. دانش‌آموزانــی که با رویکرد مبتنی

1- Visual Representations
2- Rivera
3- Hadamard
4- Jones
5- Visual and spatial thinking
6- Visualization
7- Visual reasonings
8- Tall
9- Ginsburg
10- Phillips
11- Norris
12- Macnab
13- Mancosu

۱۴- در این مقاله "تفکر مبتنی بر تجسم" و "تفکر تجسم‌محور" مترادف در نظر گرفته شده‌اند.

بر تجسم آموزش می‌بینند، می‌توانند یک مسئله را از دیدگاه‌های متفاوت بررسی کنند که این موضوع ایجاد راه حل‌های گوناگون را در پی خواهد داشت (ریحانی[1]، حاجی‌بابایی[2] و عرب‌زاده[3]، ۲۰۱۱). بنابراین دانش‌آموزان باید تجارب لازم برای انتخاب، به کارگیری و ترجمهٔ بازنمایی‌های مختلف برای حل مسایل ریاضی را به دست آورده و قادر به ترجمهٔ ارائه‌های مختلف یک مفهوم به یکدیگر باشند (NCTM ۲۰۰۰)[4]. از این‌رو به نظر می‌رسد، زمانی آموزش معنادار مفاهیم ریاضی رخ می‌دهد که با تلفیقی از مدل‌های ریاضی و ساختارهای هندسی و فیزیکی همراه باشد.

حد یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در ریاضیات است که پایهٔ بسیاری از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال را تشکیل می‌دهد و به بسیاری از مفاهیم دیگر نظیر بی‌نهایت بزرگ، بی‌نهایت کوچک، همگرایی و غیره مرتبط می‌شود. در ریاضیات مدرسه‌ای ایران، دانش‌آموزان حتی قبل از برخورد با مفهوم حد، در مبحث دنباله‌ها (ریاضیات سال دوم دبیرستان، ۲۰۰۹)، با مفهوم میل‌کردن آشنا می‌شوند. همچنین در سال سوم متوسطه و پیش‌دانشگاهی و به دنبال آن در ریاضیات دورهٔ دانشگاهی نیز با این مفهوم به طور مستمر سروکار دارند. در ریاضیات دبیرستان، معمولاً از مفهوم حد برای بیان رفتار یک تابع، یک سری یا دنباله‌ای از اعداد استفاده و به بررسی این رفتار در نقاط روی صفحه و یا در بی‌نهایت پرداخته می‌شود. حد در حساب دیفرانسیل و انتگرال و نیز در آنالیز ریاضی، همچنین برای تعریف مشتق، انتگرال و نیز مفهوم پیوستگی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

کارنو[5] (۱۹۹۱، نقل از: یوردان[6]، ۲۰۰۵) معتقد است که مفهوم حد دارای یک نقش محوری است که در آنالیز ریاضی کاملاً ریشه دارد. به نظر می‌رسد بسیاری از دانش‌آموزان با مفهوم حد مشکل دارند و اساس جهان‌بینی ریاضی بیشتر آنها این است که ریاضیات مجموعه‌ای از فرمول‌ها و محاسبات پیچیدهٔ روی آنهاست که با دنیای واقعی و فعالیت‌های روزمره ارتباطی ندارند؛ از این‌رو ملموس و قابل درک نیستند و فقط عدهٔ خاصی توانایی درک آنها را دارند. به نظر بیشاپ[7] (۱۹۸۳؛ نقل از: ریحانی و همکاران، ۲۰۱۱)، دانش‌آموزان به بازنمایی‌های تجسمی علاقه‌مندند، اما متأسفانه معلمان و متون درسی، آنها را در این مسیر هدایت نمی‌کنند. از دیدگاه او ریاضیات مدرسه‌ای به انجام دادن محاسبات تبدیل شده است. برخی معلمان از همان ابتدای کار و بدون هیچ مقدمه‌ای، با هدایت دانش‌آموزان به سمت استفاده از نمادها و رویه‌های پیدا کردن مقدار حد، آنها را از درک درست مفهوم حد دور می‌کنند. دانش‌آموزان نیز معمولاً توانایی محاسبهٔ حدها را با به کارگیری الگوریتمی فرمول‌ها و رویه‌ها، بدون آنکه قادر به تفسیر نتایج کار خود باشند. لذا شاید بیشتر دانش‌آموزان با تمرکز بر روش جبری و الگوریتمی برای محاسبه، بتوانند مسایل معمولی را حل کنند ولی برای حل مسایل غیر معمول و غیر روتین، نیازمند درک ویژگی‌های خاصی از مفهوم حد هستند (جوتر[8]، ۲۰۰۶). همچنین معلمی که قبل از مفهوم‌سازی به بیان رویه‌ها و قواعد می‌پردازد، ممکن است مانع ساخت طرح‌واره‌های درستی از مفهوم حد شود. مثلاً معلم از همان ابتدای کار بیان کند که:

"... برای درک مفهوم حد تابع و مشاهدهٔ حالات مختلف حد یک تابع، کافی است با توابع گویا کار کنیم، که نتیجه می‌تواند یکی از اشکال زیر باشد:

الف) یک عدد صحیح

ب) یک عدد گویا

ج) $\frac{0}{c}$ که c یک عدد صحیح غیر صفر است و سپس نتیجه برابر صفر است.

د) $\frac{c}{0}$ که c یک عدد صحیح غیر صفر و در نتیجه مقدار آن نامعلوم است.

و) همچنین، حد تابع می‌تواند مانند $\frac{0}{0}$ باشد که باز هم

1- Reyhani
2- Hajibabai
3- Arab zade
4- National Council of Teachers of Mathematics
5- Cornu
6- Jordaan
7- Bishap
8- Jutter

مقدار آن نامعلوم است...."(هیت[1]، چاوز[2]، ۱۹۹۹).
در این حالت دانش‌آموز ممکن است با استفاده از قواعد به حل تمرین‌ها و مسایل روتین پرداخته و نیاز به درک مفهومی را حس نکند و در نتیجه در حل مسایلی که با سطوح بالاتر تفکر و پیچیدگی سر و کار دارند و یا درک مفاهیم مرتبط با حد دچار مشکل شود. اما واقعیت این است که یادگیری ریاضیات فقط به محاسبات رویه‌ای با فرمول‌ها محدود نمی‌شود، بلکه یکی از اهداف اصلی، درک مفاهیم ریاضی است که بخشی از این درک، از طریق تجسم صورت میگیرد. مطالعهٔ حاضر قصد دارد با تأکید بر جنبه‌های بصری و تجسمی از مفهوم حد، به کاهش برخی مشکلات دانش‌آموزان در درک این مفهوم کمک کند.

چارچوب نظری تحقیق

نظریه‌پردازان مدل‌های شناختی توسعه‌یافته‌ای دارند که چگونگی فرآیندهای ذهنی انسان برای ساخت معنا را توضیح می‌دهند. رویکرد مجسم ساختن برای یادگیری مفاهیم ریاضی نیز همواره مورد توجه این نظریه‌پردازان بوده است. ریورا (۲۰۱۱) معتقد است تفکر ریاضی، با ویژگی حرکت آزادانه میان حالت‌های تجسمی، شهودی، نمادین، رسمی، غیررسمی، تحلیلی، ادراکی و کلامی مشخص می‌شود. لذا تجسم کردن و تفکر مبتنی بر تجسم همواره جزء اصلی فرآیند فهم ریاضی است. میجا راموس[3] و تال (۲۰۰٤) مطرح کرده‌اند که حساب دیفرانسیل و انتگرال، مانند هر تلاش انسانی دیگری، بر تجارب و باورهای انسان استوار است و تمرکز ما بر درک اشیای دنیای واقعی باعث می‌شود که ما از طریق به‌کارگیری "تجارب متصورشده[4]" به طبقه بندی این اشیا، در نظر گرفتن خواص آنها و ساختن مفاهیم پیچیده‌تر بپردازیم. میجا راموس و تال معتقدند این امر تحول در شروع حسابان را موجب شده و در این وضعیت، حد به عنوان یک "مفهوم مجسم ضمنی[5]" و نه یک تعریف مستقیم صوری و رسمی معرفی می‌شود.
با وجود اینکه در جامعهٔ آموزشگران ریاضی بر به کارگیری روش‌های مبتنی بر تجسم تأکید زیاد شده است، به نظر می‌رسد یک روش منحصر به فرد که بتواند به تنهایی تمام نیازهای آموزشی را برآورده کند وجود ندارد و روش‌های تجسمی، منطقی/کلامی و نمادین، مکمل هم بوده و در یک موقعیت مسئله و بسته به شرایط آن، ممکن است یکی یا ترکیبی از آنها راه‌گشا باشد. ریورا (۲۰۱۱) بین دو روش نمادین و بصری در آموزش ریاضیات مقایسه‌ای کرده که در جدول ۱ آمده است. با توجه به ویژگی‌های این دو روش (جدول۱)، به نظر می‌رسد که هیچ‌یک به تنهایی برای فهم و درک ریاضی کافی نیستند، بلکه مکمل یکدیگرند؛ فقط نکته این است که در چه مرحله‌ای و چگونه هر یک از این روش‌ها باید به کار گرفته شوند.

جدول۱- مقایسهٔ دو روش نمادین و بصری در آموزش ریاضی از دیدگاه ریورا (۲۰۱۱)

بصری	نمادین
غیررسمی و آزمایشی	رسمی و اثبات محور
شهودی	منطقی و تحلیلی
شهودی	غیرشهودی
تجربی	الگوریتمی
ابزار و مسیر	هدف
تشکیل و استفاده از تصاویر	اکتشاف و توسعهٔ درک
هندسی	نمادین
فضایی و پویا[6]	کلامی، محاسباتی و جبری
مبتنی بر نمودار[7]	نمادین و جمله‌ای
تصویری	زبانی
نیاز شناختی بالا	نیاز شناختی پایین
روشنگر	تعمیم‌پذیر
مولد و وابسته به قوهٔ حافظه	اثباتی
مسیرهای چندگانه	خطی ترتیبی

1- Hitt
2- Chavez
3- Ramos
4- Thought experiments
5- Implicit Embodied Concept
6- Spatial & Dynamic
7- Diagrammatic

برای مثال، تـال(۲۰۰۳) توصیه کرده اسـت برای اینکه دانش‌آموزان بتوانند به طور معنادار نماد بسـازند، باید از دست‌ورزی‌های عددی و نمادین با هم استفاده کنند. به نظر او این امر می‌تواند از طریق بازنمایی‌های تجسـمی/ تصویری از نمودارها، دست‌کاری آنها در ذهن و مشاهدهٔ تغییر رفتار آنها انجام شـود. برای مثال، دانش‌آموزان قبل از آنکـه بـا تعریف مشـتق کار کننـد، می‌توانند مفهوم "خطی‌سـازی" توابع مشتق‌پذیر را با بزرگ‌نمایی بخشی از نمـودار تابع حول یک نقطـه از آن تجربه کنند (تال، ۲۰۰٤).

در مـورد نحـوه شـکل‌گیری و درک یـک مفهـوم در ذهن یادگیرنـدگان نظریه‌های مختلفی وجـود دارد که همـه بر توانایی و انعطاف‌پذیـری یادگیرنده در ترجمهٔ بازنمایی‌هـای مختلف یـک مفهوم از جملـه بازنمایی هندسـی به یک دیگر اشـاره دارند. بیشـتر این مدل‌ها حرکـت از درک اولیهٔ یک مفهوم ریاضی به مرحله‌ای را نشـان می‌دهند که در آن مفهوم می‌تواند به عنوان شیء ریاضی دیده شـود (و به عکـس). از جمله این نظریه‌ها می‌تـوان به نظریهٔ تال اشـاره کرد. مدل سـه جهانی تال شـامل جهان مجسـم سـاختن، جهان فرهومی و جهان صوری- اصول موضوعه است.

جهان اول، یعنی جهان مجسـم ساختن، با درک پدیده‌ها و اشـیا از طریق تفکـر در اعمال شـکل گرفته و بدون داشتن حس روشـنی از نتیجهٔ عمل شروع می‌شود. این جهان شـامل برداشـت‌های فیزیکی اسـت که از طریق تفکـر عمیـق همراه بـا بازخـورد، به تصوراتـی ذهنی (شیءانگاری) تبدیل می‌شود. جهان اول، همچنین، عمل بر اسـاس ترکیبـی از ادراک، تجربه و آزمایش اسـت و شـامل حالت‌های بصری و فضایی از استدلال می‌شود. این جهان کـه دانش‌آموزان را با تجارب معنادار ریاضی آمـاده می‌کند، ابتدایی‌ترین مرحله بـرای درک مفهوم و چارچوبی برای ارائهٔ مطالب است.

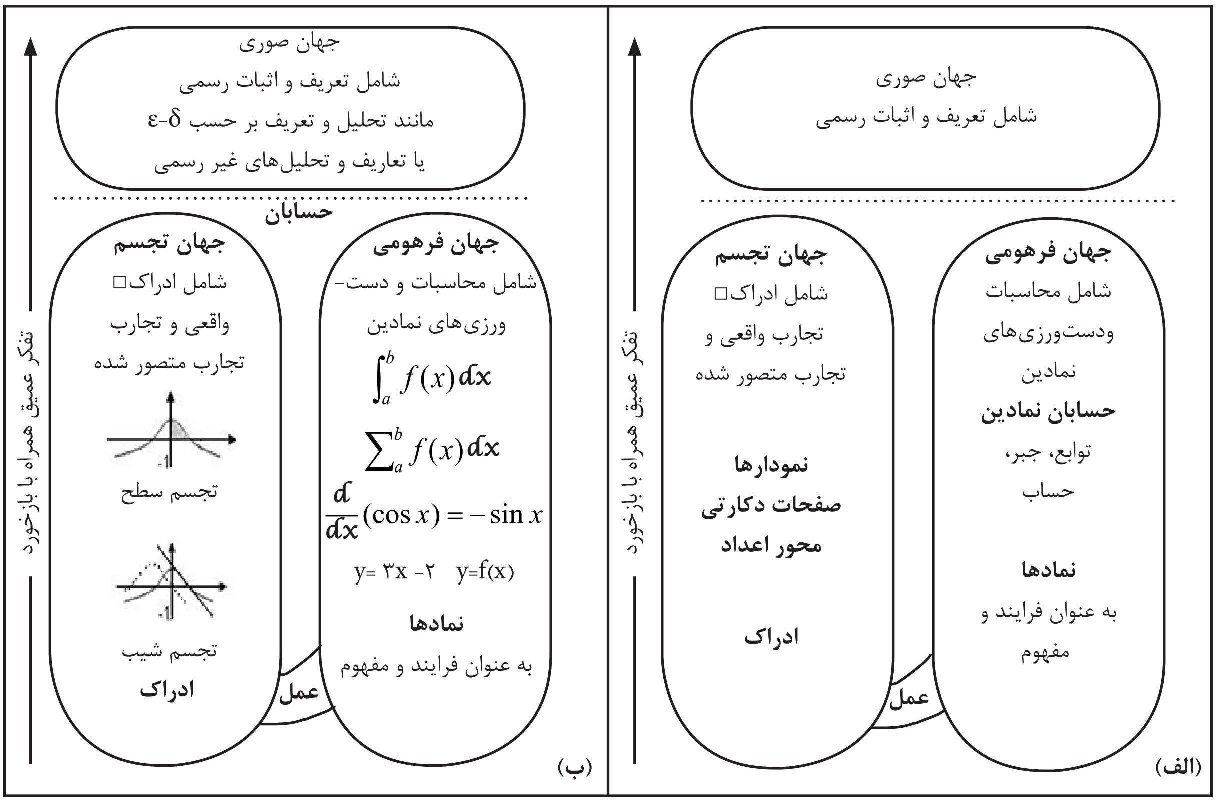
در جهـان فرهومی، اعمال رویـه‌ای و مرحله به مرحله روی تصـورات ذهنی از جهان اول انجام می‌شـود. این جهان با نمادها شـکل می‌گیرد. جهـان فرهومی از یک عمل در دنیای واقعی شـروع (مانند شـمارش) و سپس نمادین شـده و به عنوان یک مفهوم به حسـاب می‌آید (مانند مفهوم عدد). این جهان شـامل دسـت‌ورزی‌های عـددی و نمادیـن بوده و مسـتلزم شـکل‌گیری مفهوم اسـت و بازنمایی‌های بصری را به صورت مفاهیم قابل تجسـم و در قالب تعامل فرآیند - مفهوم فشرده می‌کند. تال(۲۰۰۳) این مرحله را برای بسـیاری از دانش‌آموزان مرحلـه‌ای پیچیده و بغرنج می‌دانـد و اعتقاد دارد که در این مرحله دانش‌آموزان در درک مفاهیم با مشکل مواجه می‌شوند.

مرحلـهٔ نهایی (جهان صوری) کـه از تجارب دو مرحلهٔ قبل شکل می‌گیرد، دارای ماهیت استقرایی یا قیاسی بوده و مبتنـی بر ارائـه‌ای منطقی و کلامی اسـت. این جهان بر سـاختن دسـتگاه‌های اصول موضوعه‌ای، تعاریف و اثبات‌های رسمی و صوری تمرکز می‌کند (تال، ۲۰۰٤). بـه طور خلاصه می‌توان گفت، جهان مجسـم سـاختن شـامل ادراک، تجارب واقعی و تجارب متصور شده‌ای اسـت که به وسیلهٔ تجسم شکل می‌گیرد. جهان فرهومی بـه ما این امکان را می‌دهد که بـه تدوین، فرموله کردن و حل مسـایل با دقت بسیار زیاد بپردازیم (همان منبع). جهان صوری نیز وقتی شـکل می‌گیرد که شخص بتواند برای تعریف مفاهیم و خواص ریاضی از عبارات نمادین اسـتفاده کند و توانایی دیدن مفاهیم را به اشـکال دیگر داشته باشـد (شکل ۱). شکل ۱- الف، سه جهان ریاضی مدل تال و شکل ۱- ب به کمک این مدل ساختار درک مفاهیم حسـابان از جمله مفهوم حد را نشان می‌دهد. با توجه به این شـکل می‌توان دیـد که برای درک مفاهیم، در مرحلهٔ اول باید از بازنمایی‌های تجسمی استفاده کرد. تال(۲۰۰۷) با ذکر مثالی سـاده ارتباط بین این سه جهان متفاوت را روشـن می‌کند. در جهان تجسمی ۲+۳ همان ۳+۲ اسـت، زیرا می‌توان آن را در قالب اشـیا تجسـم کرد. در جهان نمادین۲+۳ همان ۳+۲ اسـت، زیرا قابل محاسـبه است. در جهان صوری و با یک ساختار خاص

1- Hsu
2- Subject-oriented
3- Object- oriented

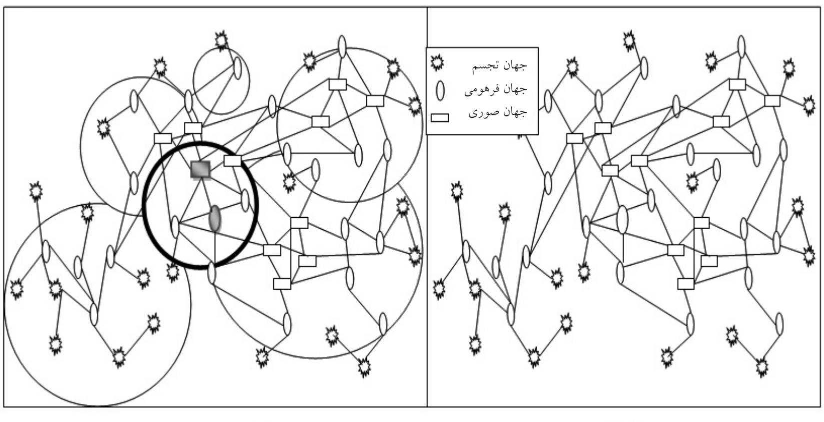
ریاضی داریم: $x + y = y + x$ ، زیرا یک اصل موضوعه است.

شکل۱-: (الف)- سه جهان ریاضی تال (ب)- ساختار مفهومی حسابان (تال، ۲۰۰۴b)



اگـــر دانش یک فرد را به صورت شـــبکه‌ای از گره‌ها و روابـــط (یال‌ها) در نظر بگیریم، آن گاه گره‌ها حوزه‌های مختلف دانش و یال‌ها (در صورت وجود) بازنمایی‌هایی هســـتند که می‌توانند به عنوان یک میانجی برای پل زدن به شـــکاف بین حوزه‌های دانش و برقراری ارتباط میان آنها مفید باشند (سگنچوک، ۱۹۹۷). می‌توان گفت زمانی که شـــخص بتواند روابط نادیدنی بین مجموعه‌گره‌ها یا حوزه‌هـــای منفرد از دانش خود را کشـــف و درک کند، دانشی منسجم و یک‌پارچه خواهد داشت (شکل۲).

شکل ۲- نقشهٔ مفهومی مدل تال



(ب) (الف)

(الف) هر گره نشان‌دهندهٔ بازنمایی مفهوم در یکی از مراحل مختلف از سه جهان تال است.

(ب) مجموعه‌هایی از گره‌ها و روابط که مفاهیم را شکل می‌دهند (جوتر، ۲۰۰٦).

براساس مدل تال، شـیءانگاری مفاهیم در مراحل اولیه و سـطح تفکر انتزاعی در مرکز شبکهٔ شکل‌گیری مفهوم است. این مدل از این نظر بسیار شبیه نظریهٔ سطوح تفکر هندسی ون هیلی[1] است که تأکید دارد با آموزش مناسب می‌توان دانش‌آموز را به سطح تفکر انتزاعی رساند.

با توجه به آنچه ذکر شد، دانش جدید و درست هنگامی حاصـل می‌شـود که یک ایـدهٔ خوب را بتـوان به یک شـبکهٔ متصل غنی و یک‌پارچه پیوند داد. با توجه به این چارچوب، نوع دانش یک دانش‌آموز در مورد یک مفهوم می‌تواند به صورت دانش پراکنده و یا منسـجم باشد که هر کدام از این دو نوع خود می‌تواند درست یا نادرست باشـد. تجربه نشان می‌دهد که اغلب دانش‌آموزان دارای دانشـی پراکنده (درست یا نادرست) هستند که خود این دانش شـامل شهود و بینشـی بی‌ارتباط با هم است. در این مورد گره‌ها در شـبکه وجود دارند اما به حوزه‌های دیگـر دانش و یا گره‌های دیگر شـبکه متصل نیسـتند (سگنچوک، ۱۹۹۷). مفاهیم جدید زمانی به طور معنادار در شـبکه جای داده می‌شـوند که روابـط بین گره‌های جدید و گره‌های موجود در داخل شـبکه درست ایجاد شـده باشـند. تجسـم این روابط گامی برای شناخت و برقـراری این روابط اسـت. همچنین مطابـق مدل تال، مفاهیم ریاضی ابتدا در جهان به طور مجسم شکل گرفته و سپس به شـکل نمادی و انتزاعی درآمده‌اند. بنابراین، در آموزش مفاهیم انتزاعی ریاضی (مثلاً مفهوم حد) هم می‌توان از این مدل بهرهٔ لازم را برد. برای مثال اگر برای معنـا دادن به مفهوم حد، ابتدا از بازنمایی‌های هندسـی آن اسـتفاده کنیم، شـاید بتوانیم نتایج بهتری در آموزش این مفهوم بگیریم. به این صورت که با بیانی مجسـم و غیرانتزاعی مبحث را آغاز و پس از شکل‌گیری مفهوم آن را با نمادها به دانش‌آموز معرفی کنیم.

سئوال‌های تحقیق

۱- اثر ارائهٔ فعالیت‌های تجسم‌محور مرتبط با مفهوم حد بر افزایش درک مفهومی دانش‌آموزان دبیرسـتانی از حد در درس حسابان چیست؟

۲- اثر ارائـهٔ فعالیت‌های تجسـم‌محور مرتبط با مفهوم حد بر پرورش توانایی فضایی دانش‌آموزان سـال سـوم متوسطه چیست؟

روش

مطالعهٔ حاضر با استفاده از طرح نیمه‌تجربی پیش‌آزمون – پس‌آزمون با گروه کنترل اجرا. و از طریق یک رویکرد کمیاتر فعالیت‌های آموزشی تجسم‌محور مرتبط با مفهوم حد بر توانایی فضایی و تجسمی دانش‌آموزان و عملکرد آنها در درک مفهوم حد، اندازه‌گیری شد. برای این مطالعه دو مدرسـه از دو شهرسـتان استان کردسـتان، انتخاب شـدند که هر یک شامل یک کلاس سوم ریاضی بودند. از آنجا که این دو کلاس، تنها کلاس‌های سـوم ریاضی دخترانهٔ این دو شهرسـتان بودند، نمونهٔ ما همان جامعه مورد مطالعـه بود؛ یعنی در واقع سرشـماری کرده‌ایم. برای بررسـی همسانی دو گروه، از دو گروه پیش‌آزمون گرفته شد. دانش‌آموزان دو گروه از دو شهرستان متفاوت بودنـد و از این رو بـا یکدیگر هیچ ارتباطی نداشـتند. ۳۴ دانش‌آمـوز هـر دو کلاس (۱۷ نفـر در هر کلاس) مشـغول به تحصیل بودند و منبع مورد اسـتفادهٔ هر دو کلاس، کتاب درسـی حسـابان (چاپ ۲۰۱۰) بود. یکی از کلاس‌هـا به صورت تصادفی به عنوان گروه آزمون و دیگری به عنوان گروه کنترل انتخاب شد. تدریس در هر دو گروه به عهدهٔ یک معلم (یکی از مؤلفان مقاله) بود.

روش اجرا

در این مطالعه، روش تدریس به عنوان متغیر مسـتقل و توانایی فضایی و درک مفهوم حد نیز به عنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته شدند. قبل از شروع آزمایش، برای تعیین همسانی و هم‌سـطح بودن دانش‌آموزان دو گروه در ارتباط با متغیرهای وابسته، یک پیش‌آزمون اجرا شد. مقایسـهٔ دو گروه از طریق پیش‌آزمون نشـان داد که دو گروه همسان‌اند. سپس دانش‌آموزان هر دو گروه آزمون و کنتـرل، در موضوعی مشـابه، یعنی حد تحت آموزش قـرار گرفتند اما روش آمـوزش دوگـروه متفاوت بود (جدول ۲).

1- Van Hiele

جدول۲- طرح تحقیق

انتخاب تصادفی گروه‌ها	پیش‌آزمون	متغیر مستقل	پس‌آزمون
گروه آزمون ($R_۱$)	$T_۱$	فعالیت‌های آموزشی تجسم‌محور	$T_۲$
گروه کنترل ($R_۲$)	$T_۱$	فعالیت‌های آموزشی معمول (مطابق روال کتاب درسی)	$T_۲$

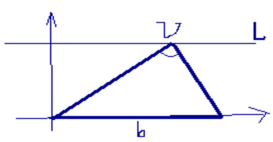
برای تسـهیل آموزش مبحث حـد تابع، در کلاس گروه آزمایش ($R_۱$) از نمودارها و فعالیت‌های بصری مناسـب و برای گروه کنترل ($R_۲$) از روش معمول، با توضیحات و مثال‌هایی از کتاب درسـی حسابان استفاده شد. در هر دو گروه نیز تکالیفی از کتاب درسـی در نظر گرفته شده بود. بعد از پایان تدریس مبحث حد به دو گروه[1]، برای بررسی تأثیر متغیر مستقل بر هر یک از متغیرهای وابسته، پس‌آزمونی شامل دو زیرآزمون روی دو گروه اجرا شد. سـپس داده‌های این آزمون‌ها جمع‌آوری و تحلیل شد. نمونـه‌ای از فعالیت‌های انجام شـده در گروه آزمون و نیز پاسـخ‌های دو نفر از دانش‌آموزان آمده است. مشکل دانش‌آموزان در پاسـخ‌گویی به فعالیت داده شده، بیشتر در پرسـش دوم نمایان اسـت، زیرا به تجسمی قوی از وضعیت مسـئله نیازمند اسـت. توجه بـه بخش (ب) نشـان می‌دهد که دانش‌آموز قادر به رسم نمودار درست نبوده اسـت که ممکن است دلیلی برای عدم موفقیت در پاسخ‌گویی به یکی از حدهای داده شده باشد.

فعالیـت ۵ (مثلث در حـال تغییر): (الف) پاسـخ یکی از دانش‌آموزان گروه آزمون به فعالیت. (ب) بخشـی از پاسـخ یکی دیگر از دانش‌آموزان به فعالیت.

(الف)

۱- مثلـث دلخواهی را در نظر بگیرید که قاعدهٔ آن ثابت و برابر b باشد. اگر رأس مقابل قاعده را v نامیده شده و روی خطی موازی قاعده مانند L باشد:

a) شکلی برای این مسئله رسم کرده و قاعدهٔ b، رأس v و خط L را معلوم کنید.



b) اگـر رأس v روی خط L حرکت کند، توضیح دهید مسـاحت مثلث یعنـی A، چـه تغییری خواهـد کرد؟ **مسـاحت ثابت اسـت چون طول ارتفاع و قاعدهٔ آن تغییر نمی کند.**

c) اگـر رأس v روی خط L حرکت کند، توضیح دهید محیط مثلث یعنی P، چه تغییری خواهد کرد؟ **محیط نیز به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.**

d) اگر مسـاحت مثلـث در ابتدا ۱۸ سـانتی‌متر مربع و محیط آن ۲۱ سـانتی‌متر بوده و رأس v با سـرعتی ثابت (نسبت به زمان t) و در جهت مثبت روی خط L حرکت کند، در این صورت حاصل حدهای زیر را بنویسید:

$\lim_{t\to\infty} P(t)=$ **بینهایت**

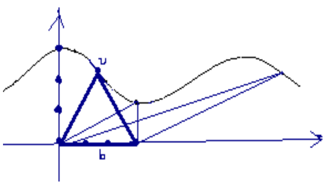
$\lim_{t\to ۰} P(t)=$ ۲۱

$\lim_{t\to ۰} A(t)=$ ۱۸

$\lim_{t\to\infty} A(t)=$ ۱۸

۲- حـال تصور کنید که قاعـدهٔ مثلث فعالیت قبل روی محور طول‌ها و برابـر ۳ واحد، و رأس آن روی نمودار تابع f(x)=۳+ sinx باشد.

a) شکلی برای این مسئله رسم کنید.



F(x)=٤ F(x)=٢

max min

b) اگـر رأس v روی نمـودار تابع f حرکت کند، در این صورت حاصل حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید:

$\lim_{t\to\infty} A(t)=$ **موجود نیست**

$\lim_{t\to\infty} P(t)=\infty$

c) نمودار تابع f چگونه باید باشد که داشته باشیم:

?$\lim_{t\to\infty} A(t)=\infty$

[1] - آموزش فصل حد به دوگروه در طول سه هفتهٔ آموزشی (نیمهٔ دوم اسفند ۸۹ و هفتهٔ سوم فروردین ۹۰) به پایان رسید.

مثلاً رأس مثلث روی نمودار Y=X باشد.

۳- اگــر مختصات دو ســر قاعدهٔ مثلــث فعالیت قبل به صــورت A(۰،۰) و B(۶،۰) بوده و رأس V روی خط= y=۸-x باشــد، در این صورت حاصل حدهای زیر را به دست آورید:

$\lim_{x\to ۸} A=$ ۸

$\lim_{x\to ۰} A=$ ۲۴

$\lim_{x\to ۸} P=$ ۰

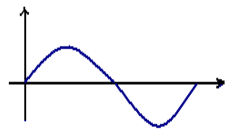
$\lim_{x\to ۰} P=$ ۲۴

$\lim_{x\to \infty} A=$ ۰

$\lim_{x\to \infty} P= +\infty$

(ب)

۱- حــال تصور کنید که قاعــدهٔ مثلث فعالیت قبل روی محــور طول‌ها و برابر ۳ واحــد و رأس آن روی نمودار تابع f(x)=۳+ sinx باشد.



a) شکلی برای این مسئله رسم کنید.

b) اگــر رأس v روی نمــودار تابع f حرکت کند، در این صورت حاصل حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید:

$\lim_{t\to \infty} P(t)=$ **وجود ندارد**

$\lim_{t\to \infty} A(t)=$ **وجود ندارد**

ابزارهای پژوهش

ابزار این پژوهش از ســه بخش تشــکیل شــده اســت: "آزمــون پیشــینهٔ ریاضــی" از موضوعاتی کــه در مورد آنها می‌توان از تجســم استفاده کرد، "آزمون تست ورق تاشــو[1]" و "آزمون ارزیابی درک مفهوم حد[2]" (جدول۳). پیش‌آزمــون و پس‌آزمون خود هر یک شــامل دو بخش هســتند. بخشــی از هر یک از آزمون‌های پیش‌آزمون و پس‌آزمون، به ســنجش توانایی فضایی، یعنی تست ورق تاشو مربوط است.

جدول۳- آزمون‌ها

پس آزمون	پیش‌آزمون
ارزیابی درک مفهوم حد	پیشینهٔ ریاضی مبتنی بر تجسم
تست ورق تاشو (b)	تست ورق تاشو (a)

تســت ورق تاشو آزمونی اســتاندارد و بین‌المللی است که سئوال‌های آن به ســال ۱۹۷۶برمی‌گردد، اما محققان علوم‌شــناختی همچنان از آنها برای اندازه‌گیری توانایی فضایی، در طیف گســترده‌ای از گروه‌های سنی (مقاطع راهنمایی تا دانشگاه) استفاده می‌کنند (هیگارتی[3]، ۲۰۰٤). بخش دیگر پیش‌آزمون که در حل آنها می‌توان تجســم را بــه کار گرفت، آزمون محقق ســاخته‌ای اســت که به مباحثی از ریاضیات کسب شده در سال‌های قبل مربوط اســت. این آزمون به منظور مقایســهٔ مهــارت و توانایی دانش‌آموزان دو گروه در تجسم کردن (از متغیرهای مورد مطالعه در پس‌آزمون) اجرا شد. بخش دوم پس‌آزمون نیز کــه درک مفهومی دانش‌آموزان دو گروه را از مفهوم حد نشــان می‌دهد، به ارزیابی درک مفهوم حد مربوط است. ســئوال‌های این آزمون را نیز پژوهشگران جمع‌آوری و تهیه کردند.

پیش‌آزمــون و پس‌آزمــون هر کدام ۲۰ نمره داشــت که از این ۲۰ نمره پنج نمره به آزمون تســت ورق تاشــو و ۱۵ نمــره به هر یک از دو آزمــون دیگر اختصاص داده شــده بود. بیشتر ســئوال‌ها از آزمون تیمز و پایان‌نامه‌ها و مقاله‌هــای معتبر و مرتبط انتخاب شــده بودند. اگرچه روایی و پایایی آزمون‌ها قبلاً ســنجیده شــده بود، برای ســنجش روایی مجدد آنها در این پژوهــش، با پنج نفر از اســاتید ریاضی و آموزش ریاضی دانشــگاه مشورت شــد. پایایــی آزمون‌ها نیز بــا اســتفاده از ضریب آلفای کرونباخ تعیین شــد. ضریب آلفای محاســبه شده برای هر یک از آزمون‌های "تســت ورق تاشو(a)" و "پیشینهٔ ریاضــی" در پیش‌آزمون، به ترتیــب ۰/۸۸٦ و ۰/۷۰٦ و برای آزمون‌های "تست ورق تاشو (b)" و "ارزیابی درک مفهــوم حد" در پس‌آزمون، بــه ترتیب ۰/۸۳۹ و ۰/۷۵۵ بود. این مقادیر نشــان دادند که این ابزارها برای سنجش توانایــی فضایــی و درک دانش‌آمــوزان از مفهوم حد از دقت مناسبی برخوردارند.

1- Paper folding test
2- Limit Asissment
3- Hegarty

روش آماری

برای تجزیه و تحلیل داده‌های این تحقیق، از روش‌های آمار توصیفی و استنباطی استفاده شده است. در سطح توصیفی، شاخص‌هایی از قبیل میانگین، انحراف معیار، تهیهٔ جداول توزیع فراوانی و درصدها و رسم نمودار و در سطح استنباطی نیز، برای بررسی و مقایسهٔ میانگین‌های دو گروه آزمایش و کنترل در پیش‌آزمون و پس‌آزمون، از آزمون تحلیل واریانس چندمتغیره[1] استفاده شد که نتایج آن در ادامه خواهد آمد.

یافته‌ها

تحلیل نتایج پیش‌آزمون

در جدول ٤، نتایج آزمون T، که تفاوت میانگین‌هاست، و نتیجهٔ تست لوین[2] برای برابری واریانس‌ها نشان داده شده است.

جدول ۴ ـ آزمون‌های لوین و T برای نمونه‌های مستقل

آزمون T برای تساوی میانگین‌ها							آزمون لوین برای برابری واریانس‌ها		
فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای تفاوت‌ها		احتمال انحراف استاندارد	تفاوت میانگین	Sig. (2-tailed)	درجهٔ آزادی	مقدار T	معناداری	مقدار F	
بالاترین	پایین‌ترین								
۱/۱۸۵۹۰	-۲/۵۱۳۱۱	۰/۹۰۶۸۴	-۰/۶۶۳۶۰	۰/۴۷۰	۳۱	-۰/۷۳۲	۰/۶۵۵	۰/۲۰۳	فرض برابری واریانس‌ها
۱/۱۸۰۸۲	-۲/۵۰۸۰۲	۰/۹۰۴۳۲	-۰/۶۶۳۶۰	۰/۴۶۹	۳۰/۹۷۸	-۰/۷۳۴			فرض نابرابری واریانس‌ها

سپس مقدار T، درجهٔ آزادی، احتمال انحراف استاندارد T برای تفاوت‌ها و فاصلهٔ اطمینان در سطح ۹۵ درصد محاسبه شده است.

با توجه به جدول ٤، مقدار تست لوین ۰/٦٥٥ (بزرگ‌تر از ۰/۰۵) است، یعنی واریانس‌های دو گروه برابر است و لذا باید از آزمون‌های واریانس‌های برابر MANOVA استفاده شود. حال فرضیه‌های زیر را می‌آزماییم:

جدول ۵ ـ نتایج آزمون تحلیل واریانس چند متغیره

سطح معناداری F	درجهٔ آزادی خطا	درجهٔ آزادی اثر مورد بررسی	F	مقدار	نام آزمون
۰/۶۳۲	۳۰/۰۰۰	۲/۰۰۰	۰/۴۶۵[a]	۰/۰۳۰	اثر پیلایی
۰/۶۳۲	۳۰/۰۰۰	۲/۰۰۰	۰/۴۶۵[a]	۰/۹۷۰	لامبدای ویلکس
۰/۶۳۲	۳۰/۰۰۰	۲/۰۰۰	۰/۴۶۵[a]	۱۶۰	اثر هتلینگ
۰/۶۳۲	۳۰/۰۰۰	۲/۰۰۰	۰/۴۶۵[a]	۱۶۰	بزرگترین ریشهٔ روی

فرض صفر: بین میانگین نمرات دو گروه مورد بررسی تفاوت معناداری وجود ندارد.

فرض یک: بین میانگین نمرات دو گروه مورد بررسی تفاوت معناداری وجود دارد.

جدول ۵ خروجی آزمون MANOVA برای دو گروه را، که دارای واریانس‌های برابرند، نشان می‌دهد. با توجه به سطح معناداری F (Sign =۰/٦٣٢) که از ۰/۰۵ بیشتر است، فرض صفر تأیید و فرض یک یا مقابل رد می‌شود، یعنی میانگین نمرات دانش‌آموزان در پیشینهٔ ریاضی و توانایی فضایی برابر است. به نوعی می‌توان گفت که گروه‌های کنترل و آزمون قبل از اجرای آزمایش، یعنی استفاده از روش‌های تدریس متفاوت، تفاوتی با هم نداشتند.

1- Multivariate Analysis Of Variance (MANOVA)
2- Levenes Test

جدول۶- نتایج آزمون تحلیل واریانس برای هر یک از متغیرها

متغیر وابسته		مجموع مجذورات	درجهٔ آزادی	میانگین مجذورات	F	سطح معناداری F
پیشینهٔ ریاضی	Contrast	۱/۰۰۵	۱	۱/۰۰۵	۰/۲۲۷	۰/۶۳۷
	Error	۱۳۷/۱۸۰	۳۱	۴/۴۲۵		
توانایی فضایی	Contrast	۰/۸۱۴	۱	۰/۸۱۴	۰/۹۴۹	۰/۳۳۷
	Error	۲۶/۵۹۵	۳۱	۰/۸۵۸		

در جدول ٦ هر یک از ابعاد "پیشینهٔ ریاضی" و "توانایی فضایی" جداگانه بررسی شد. با توجه به جدول ٦، چون سطح معناداری F در آزمون پیشینهٔ ریاضی ۰/٦٣٧ و سطح معناداری F در آزمون توانایی فضایی نیز ۰/۳۳۷ و هر دو از ۰/۰۵ بیشتر است، از این رو دانش‌آموزان در هر دو بعد حد و توانایی فضایی، تفاوت معناداری با هم ندارند.

تحلیل نتایج پس‌آزمون

با توجه به جدول ۷، مقدار تست لوین ۰/۱۶۲ (بزرگ‌تر از ۰/۰۵) است، یعنی واریانس‌های دو گروه برابرند و بنابراین باید از آزمون‌های واریانس‌های برابر MANOVA استفاده شود. در این مرحله فرضیه‌های زیر آزمون می‌شوند:

جدول ۷- آزمون‌های لوین و T برای نمونه‌های مستقل

	آزمون T برای تساوی میانگین‌ها							آزمون لوین برای برابری واریانس‌ها	
	فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای تفاوت‌ها		احتمال انحراف استاندارد	تفاوت میانگین	Sig. (2-tailed)	درجهٔ آزادی	مقدار T	معناداری	مقدار F
	بالاترین	پایین‌ترین							
فرض برابری واریانس‌ها	۵/۶۷۸۹۴	۲/۲۵۴۸۸	۰/۸۳۹۴۳	۳/۹۶۶۹۱	۰/۰۰۰	۳۱	۴/۷۲۶	۰/۱۶۲	۲/۰۴۸
فرض نابرابری واریانس‌ها	۵/۶۹۲۶۱	۰/۲۴۱۲۲	۰/۸۴۴۱۵	۳/۹۶۶۹۱	۰/۰۰۰	۲۹/۳۰۴	۴/۶۹۹		

جدول۸- نتایج آزمون تحلیل واریانس چند متغیره

سطح معناداری F	درجهٔ آزادی خطا	درجهٔ آزادی اثر مورد بررسی	F	مقدار	نام آزمون
۰/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۲/۰۰۰	۱۰/۸۰۶[a]	۰/۴۱۹	اثر پیلایی
۰/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۲/۰۰۰	۱۰/۸۰۶[a]	۰/۵۸۱	لامبدای ویلکس
۰/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۲/۰۰۰	۱۰/۸۰۶[a]	۰/۷۲۰	اثر هتلینگ- لالی
۰/۰۰۰	۳۰/۰۰۰	۲/۰۰۰	۱۰/۸۰۶[a]	۰/۷۲۰	بزرگترین ریشهٔ روی

جدول ۸ خروجی آزمون MANOVA برای دو گروه را که دارای واریانس‌های برابر هستند نشان می‌دهد. با توجه به میزان سطح معناداری F (Sign =۰/۰۰۰) که از ۰/۰۵ کمتر است، می‌توان نتیجه گرفت که فرض صفر رد و فرض یک یا مقابل تأیید می‌شود، یعنی می‌توان گفت روش‌های تدریس بر درک دانش‌آموزان از مفهوم حد و توانایی فضایی آنها تأثیر می‌گذارد. البته جدول ۸ نشان نمی‌دهد که روش تدریس بر کدام یک از ابعاد "درک مفهوم حد" و "میزان توانایی فضایی" دانش‌آموزان تأثیر گذاشته است. این مسئله در جدول ۹، که تک تک

ابعاد بررسی شده‌اند، مشخص است.
جدول ۹، نتایج تحلیل واریانس برای هر یک از متغیرها را به طور جداگانه نشان می‌دهد. با توجه به این جدول، سطح معناداری F در آزمون حد از ۰/۰۵ کمتر، و سطح معناداری F در آزمون توانایی فضایی نیز از ۰/۰۵ بیشتر است که نشان‌دهندهٔ این مسئله است که روش‌های تدریس متفاوت، بیشترین تأثیر را بر درک افراد از مفهوم حد داشته و اعمال متغیر مستقل بر درک افراد از مفهوم حد تأثیرگذار بوده است. در واقع می‌توان نتیجه گرفت که ارائهٔ فعالیت‌های مبتنی بر تجسم در رابطه با مفهوم حد، بر افزایش توانایی فضایی دانش‌آموزان تأثیر چندانی نداشته است و تفاوت گروه‌ها در این مورد معنادار نیست. در مورد دلایل این امر در بخش بعدی بحث و بررسی می‌شود.

جدول۹- نتایج آزمون‌های تحلیل واریانس برای هر یک از متغیرها

متغیر وابسته		مجموع مجذورات	درجهٔ آزادی	میانگین مجذورات	F	سطح معناداری F
حد	Contrast	۱۰۸/۲۰۱	۱	۱۰۸/۲۰۱	۲۱/۱۳۳	۰/۰۰۰
	Error	۱۵۸/۷۲۰	۳۱	۵/۱۲۰		
توانایی فضایی	Contrast	۰/۹۷۴	۱	۰/۹۷۴	۳/۰۶۲	۰/۰۹۰
	Error	۹/۸۵۹	۳۱	۰/۳۱۸		

نتیجه گیری

با توجه به آنچه ذکر شد، متوسط عملکرد فضایی دانش‌آموزان دو گروه کنترل و آزمون در پیش‌آزمون سنجش توانایی فضایی تقریباً برابر بوده و تفاوت دو گروه معنادار نبوده است که این هم‌سطح بودن دو گروه آزمایش و کنترل را در پیش‌آزمون نشان می‌دهد.

در پاسخ به سئوال اول تحقیق، مشاهده می‌شود که متوسط عملکرد دانش‌آموزان گروه آزمون در ارزیابی درک مفهوم حد بیش از متوسط عملکرد دانش‌آموزان گروه کنترل است. سطح معناداری F در آزمون حد کمتر از ۰/۰۵ نشان‌دهندهٔ آن است که روش‌های متفاوت تدریس بر درک افراد از مفهوم حد تأثیر داشته و عملکرد دانش‌آموزان گروه آزمون در درک مفهوم حد بهتر از دانش‌آموزان گروه کنترل بوده، است. نتیجه اینکه فعالیت‌های تجسم‌محور بر درک دانش‌آموزان گروه آزمون از مفهوم حد اثر مثبت داشته است. این نتیجه با نتایج تحقیقاتی مانند جونگ[1] (۲۰۰۹)، ایلیا[2]، گاگاتسیس[3]، پانورا[4]، زاخاریا[5] و زولیناکی[6] (۲۰۰۹)، لاجینیان[7] (۲۰۰۸) و بیوک کروگلو[8] و همکاران(۲۰۰۵) هماهنگ است.

در پاسخ به سئوال دوم تحقیق نیز نتایج جدول ۹ نشان می‌دهد، با اینکه متوسط عملکرد فضایی دانش‌آموزانی که به روش تجسم محور آموزش دیده‌اند بیشتر از متوسط عملکرد فضایی دانش‌آموزانی است که بدون محوریت تجسم آموزش دیده‌اند، اما این تفاوت با توجه به درجهٔ اطمینان ۹۵ درصد مورد نظر در این تحقیق و نیز بیشتر از ۰/۰۵بودن سطح معناداری F در پس‌آزمون سنجش توانایی فضایی است و، معنادار نبوده و توانایی فضایی دانش‌آموزان گروه آزمون نسبت به دانش‌آموزان گروه کنترل رشد نکرده است. این نتیجه با نتایج تحقیقات عرب‌زاده (۲۰۰۹) و لاجینیان (۲۰۰۸) هماهنگ، اما با نتیجهٔ تحقیقات دیگری از جمله قربانی سی‌سخت[9] (۲۰۰۹) متناقض است.

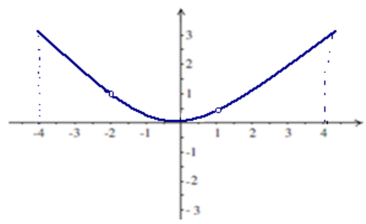
با توجه به آنچه در بخش‌های قبلی گفته شد، می‌توان نتیجه گرفت که با آموزش مناسب می‌توانیم برای کمک به درک بهتر مفاهیم ریاضی، مهارت‌های مرتبط با تجسم دانش‌آموزان را ارتقا دهیم؛ چرا که دانش‌آموزان گروه آزمون در پاسخ‌گویی به سئوال‌های حد موفق‌تر از دانش‌آموزان گروه کنترل بودند. نمونه‌ای از پاسخ‌های

1- Joong
2- Elia
3- Gagatsis
4- Panaoura
5- Zachariades
6- Zoulinaki
7- Lajinian
8- Büyükköroğlu
9- Ghorbani sisakht

دانش‌آموزان دو گروه به سئوال‌های ارزیابی درک مفهوم حد در شکل‌های ۳ و ٤ آمده است.

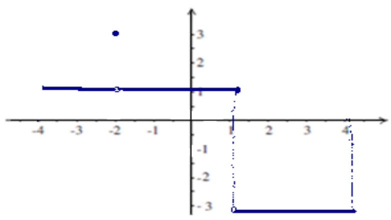
شکل ۳- (الف) نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه آزمون به سئوال هفتم آزمون ارزیابی درک مفهوم حد. (ب)نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه کنترل به سئوال هفتم آزمون ارزیابی درک مفهوم حد.

نموداری برای تابع $f:[-٤,٤]\to[-۳,۳]$ با شرایط زیر رسم کنید: $f(-۲)$ و $\lim_{x\to -۲} f(x)$ موجود باشند، تابع f در x=-۲ ناپیوسته باشد و در x=۱ حد نداشته باشد.



(الف)

نموداری برای تابع $f:[-٤,٤]\to[-۳,۳]$ با شرایط زیر رسم کنید: $f(-۲)$ و $\lim_{x\to -۲} f(x)$ موجود باشند، تابع f در x=-۲ ناپیوسته باشد و در x=۱ حد نداشته باشد.



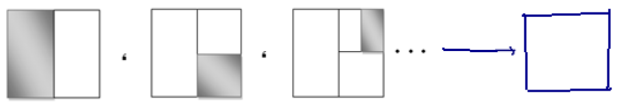
(ب)

شکل ٤- (الف) نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه آزمون به سئوال یازدهم آزمون ارزیابی درک مفهوم حد. (ب) نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه کنترل به سئوال یازدهم آزمون ارزیابی درک مفهوم حد.

به کمک دنبالۀ شکل‌های داده شده، مجموع زیر را حدس بزنید؟

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+......?$

یعنی کل مربع سفید می‌شود و هر قسمت رنگی صفر است. پس این حاصل جمع نیز برابر یک است. ۱ →



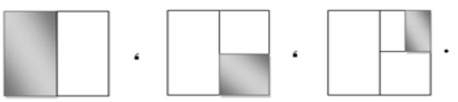
$\lim_{x\to\infty}$ مربع $=۱$

(الف)

به کمک دنبالۀ شکل‌های داده شده، مجموع زیر را حدس بزنید؟

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+......?$

$S_n=\frac{1}{۲}\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-(\frac{۱}{۲})}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{(\frac{۱}{۲})}=۱-(\frac{۱}{۲})^n$



$\to \frac{۲}{۲}$

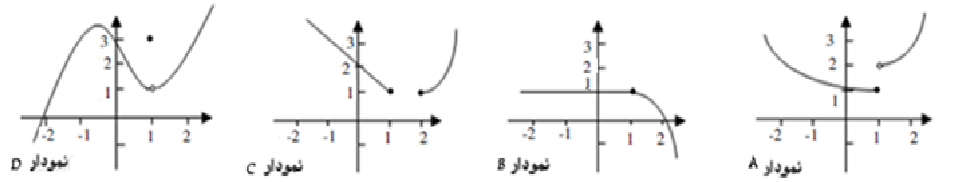
(ب)

سئوال هفتم (شکل ۳) یک سئوال بازپاسخ است که می‌تواند دانش دانش‌آموزان را در زمینۀ مفاهیم مختلف، از جمله حدهای چپ و راست، حد در بی‌نهایت، دامنه و برد تابع، پیوستگی و انواع ناپیوستگی‌ها و بالاخره توانایی‌های مربوط به ترسیم نمودار به خوبی به چالش بکشد و به خصوص درک دانش‌آموزان از مفهوم حد را (که از اهداف این تحقیق است) نمایان سازد. در پاسخ‌گویی به سئوال هفتم دانش‌آموز گروه آزمون (شکل الف) بسیار بهتر توانسته است شرایط مسئله را در نموداری ساده نمایش دهد، در حالی که دانش‌آموز گروه کنترل (شکل ب) در این مرحله موفق عمل نکرده است. نسبت دانش‌آموزانی که از این سئوال نمرۀ بیشتر از یک کسب کرده‌اند، در گروه آزمون نسبت به گروه کنترل، ۱۲ به ۱ است. بنابراین دانش‌آموزان گروه آزمون در پاسخ‌گویی به این سئوال، به مراتب بهتر عمل کرده‌اند. با توجه به شکل ٤، رویکرد دانش‌آموز گروه آزمون در پاسخ‌گویی به این سئوال نیز همانند بیشتر سئوال‌ها، استفاده از تجسم و بازنمایی‌های بصری مورد تأکید مسئله است؛ در حالی که دانش‌آموز گروه کنترل برای تعیین مجموع سری داده شده به روش‌های جبری

متوسل شده و به وضوح در این کار ناکام مانده است. در پاسخ‌گویی به این سئوال، ۱۰ نفر از دانش‌آموزان گروه آزمون توانستند نمرهٔ کامل بگیرند، در حالی که فقط سه نفر از گروه کنترل موفق به انجام این کار شده و البته بیشتر دانش‌آموزانی که نمرهٔ کامل سئوال را گرفته‌اند، برای حل مسئله از روش‌های بصری استفاده کرده‌اند. در شکل‌های ۵ و ٦ ، پاسخ‌های دو نفر از دانش‌آموزان به یکی دیگر از سئوال‌های آزمون حد آمده است. داده‌ها نشان می‌دهند که تمامی دانش‌آموزان گروه آزمون گزینهٔ صحیح (ب) را انتخاب کردند، در حالی که ۲۵ درصد از دانش‌آموزان گروه کنترل گزینهٔ دیگری را انتخاب کرده‌اند.

شکل ۵- نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه آزمون به سئوال چهارم ارزیابی درک مفهوم حد

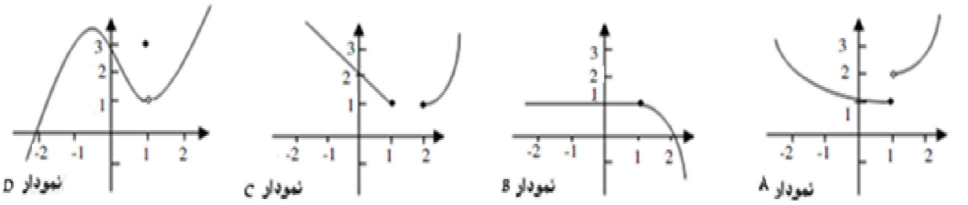
رابطهٔ $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ در مورد کدام نمودار زیر درست است؟ فقط برای B درست در می‌آید؛ چون فقط گزینه B پیوسته است.



(الف) فقط A (ب) فقط B (ج) فقط C (د) A,B (ه) A,B,C

شکل ۶- نمونه پاسخ یکی از دانش‌آموزان گروه آزمون به سئوال چهارم ارزیابی درک مفهوم حد

رابطهٔ $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ در مورد کدام نمودار زیر درست است؟ گزینه (ه) درست است، زیرا سه نمودار اول در نقطه ۱ توپر هستند.



(الف) فقط A (ب) فقط B (ج) فقط C (د) A,B (ه) A,B,C

نتایج تحلیل‌های آماری نیز حاکی از آن است که آموزش تجسم‌محور مفهوم حد به دانش‌آموزان می‌تواند به درک یادگیرندگان از این مفهوم کمک شایانی بکند. اما این روش ظاهراً در افزایش توانایی‌های فضایی دانش‌آموزان تأثیر قابل توجهی نداشته است که دلیل آن می‌تواند به گروه‌های سنی مورد مطالعه مربوط باشد. کیسی[1]، نوتال[2] و پزاریس[3] (۲۰۰۱) معتقدند اگر دانش‌آموزان موقع ورود به دبیرستان توانایی‌های فضایی را کسب نکرده باشند، توسعهٔ مهارت‌های فضایی آنها سخت خواهد بود. بنابراین این تفاوت با توجه به جامعهٔ مورد مطالعه در تحقیق قربانی سی‌سخت (۲۰۰۹) که دانش‌آموزان ابتدایی بودند و جامعهٔ مورد مطالعه در تحقیقات عرب‌زاده (۲۰۰۹)، لاجینیان (۲۰۰۸) و همچنین تحقیق حاضر که از میان دانش‌آموزان مقاطع راهنمایی و دبیرستان انتخاب شده بودند قابل توجیه است؛ زیرا به نظر می‌رسد آموزش توانایی‌های فضایی در سنین پایین مؤثرتر است و نتایج بهتری در پی دارد.

نمرات دانش‌آموزان گروه آزمون در درک مفهوم حد

1- Casey
2- Nuttall
3- Pezaris

درحالـی افزایش یافته بـود که این دانش‌آمـوزان زمان بیشتری را صرف یادگیری در کلاس نمی‌کردند و مقدار و ساعت آموزشی آنان با گروه کنترل یکسان بود. بنابراین نتایج نشان می‌دهد که با بهره‌گیری از روش تجسمی در آموزش می‌توان به دانش‌آموزان کمک کرد تا در یادگیری ریاضی فعال‌تر باشـند و به درک بیشتر نایل آیند. علاوه بر این، آگاهـی دانش‌آموزان از رویکردهای گوناگون نه تنها ضروری اسـت، بلکه آنها باید بدانند کجا و چگونه از یـک راهبرد و رویکرد اسـتفاده کنند. گرچه در عمل به‌کار بردن روش تجسـمی در تدریـس مفاهیم ریاضی به سـادگی روش‌های محاسـباتی و جبری نیست، زیرا در مقایسـه با روش تجسـمی، با آموزش برخی رویه‌ها و مهارت‌های محاسـباتی مربوط به حد، دانش‌آموزان به سـادگی می‌توانند نمرات و نتایج خوبی از سـئوال‌های رویه‌ای کسب کنند، اما با این کار فرصت کشف و درک درونی مفهوم حد از آنها گرفته می‌شود. نگاه تک بعدی و بی‌توجهـی بـه نمادها و علایم نیـز می‌تواند به همان اندازه ناکام کننده باشد، چون ممکن است دانش‌آموزان طرح‌واره‌های بی‌ربط و نادرست ایجاد کنند.

به نظر ریورا (۲۰۱۱)، چالش‌های آموزشـی در مواردی به وجود می‌آیند که به نظر می‌رسـد بین اشیا، مفاهیم و یا فرآیندهای ریاضی و بازنمایی‌های بصری، هیچ رابطهٔ روشنی وجود ندارد؛ یعنی تعریف و ارائهٔ صریح و بدون واسـطهٔ مفاهیم به دانش‌آمـوزان باعث عدم درک مفهوم و یادگیـری طوطـی‌وار آنها خواهد شـد. یافته‌های این پژوهش اشـاره به این دارد که در شـرایط مناسـب و با کمک فعالیت‌های مبتنی بر تجسـم می‌توان امیدوار بود کـه دانش‌آموزان به جای حفظ فرمول‌ها، از مفهوم مورد نظـر آموزش درک عمیق‌تری پیدا کنند. همچنین تقویت توانایی فضایی در یک محیط یادگیری با نشاط و متناسب با دنیای واقعی و توانایی‌های طبیعی دانش‌آموزان، سبب درک بهتر مفاهیم انتزاعی ریاضی می‌شود.

بیشـاب (۱۹۸۳، نقل شـده در ریحانـی، ۲۰۰۶) معتقد است با اینکه عده‌ای توانایی فضایی را یک موهبت ذاتی می‌داننـد، اما مطالعات زیادی نشـان داده‌اند که توانایی فضایی از طریق آموزش قابل توسعه است؛ لذا برای اینکه طرح‌واره‌های مناسـب و درسـتی در ذهن دانش‌آموزان شـکل گیرد، کتاب‌های درسی و تدریس در کلاس باید مبتنی بر فعالیت‌هایی باشند که این جنبه از نمایش مفهوم حـد را تقویت می‌کنند. این تحقیـق روی یک موضوع درسـی خاص، در یـک مقطع خاص و روی جنسـیتی خاص صورت گرفته اسـت که این عوامل تعمیم‌پذیری نتایـج آن را ناممکـن می‌کنـد. با توجه به گسـتردگی موضـوع، در برخی مطالعات آتی می‌توان تأثیر تدریس مبتنی بر تجسـم بر دیگر مفاهیم حسـاب دیفرانسیل و انتگرال؛ تأثیر تدریس مبتنی بر تجسم بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان دوره‌های ابتدایی و راهنمایی؛ میزان آشنایی و اعتقاد معلمان به تدریس به روش تجسمی؛ تفاوت‌های احتمالـی بین دختران و پسـران از نظر توانایی فضایی و مانند آن را مورد بررسی قرار داد.

دریافت مقاله: ۹۱/۱/۲۲؛ پذیرش مقاله: ۹۱/۱۱/۱۷

منـــابع

Arabzadeh, R. (2009). Effect of visualization-based teaching approach on attitude of 8th grade students toward mathematics [dissertation]. Tehran: Shahid Rajaee Teacher Training University.

Broojerdian, N., & Reyhani, E., & Taaheri Tanjaani, M. T., & Alamian, V. (2010). *11th grade text book: Calculus*. Tehran: Ministry of Education.

Büyükköroğlu, T., & Çetin, N., & Deniz, A., & Düzce, S. A., & Mahir, N., & Üreyen, M. (2006). The effect of computers on teaching the limit concept. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Casey, M. B., & Nuttall, R. L., & Pezaris, E. (2001). Spatial-mecanical reasoning skills versus mathematics self-confidence as mediarors of gender differences on mathematics subtests using cross-national gender-based items. *Research in Mathematics Education*, 32, 28-57.

Elia, I., & Gagatsis, A., & Panaoura, A., & Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and Algebric approaches in the concept of Limit and the impact of the Didactic contract. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 765-79.

Ghorbani-Sisakht, z. (2009). Effect of visual representation of fractions on 4th grade students' understanding of fractions [dissertation]. Tehran: Shahid Rajaee Teacher Training University.

Hegarty, M. (2004). *Diagrams in the mind and in the world: Relations between internal and external visualizations*. Cambridge: Springer.

Hitt, F., & Lara-Chavez, H. (1999). Limits, continuity and discontinuity of functions from to points of view: that of the teacher and that of the student. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 19, 49-54.

Jones, K. (2001). Spatial thinking and visualization: *Teaching and learning geometry,* 19, 55-56.

Joong, K. D. (2009). Comparison of native-English and native-Korean speaking university students' discourse on infinity and limit [dissertation]: Michigan State University.

Jordaan, T. (2005). Misconception of the limit concept in a mathematics course for engineering students. [dissertation]. University of South Africa.

Juter, K. (2006). Limits of Functions University Students' Concept Development [dissertation]. Sweeden: Lulea University of Technology.

Lajinian, A. (2008). The effect of visually enhanced instructional units on high school calculus students' visualization ability and their understanding of the limit concept [dissertation]. New Jersey: Montclair State university.

Mancosu, P. (2005). *Visualization in logic and mathematics: Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*. Dordrecht, TheNetherlands: Springer.

Meija-Ramos, J. P., & Tall, D. O. (2004). Reflecting on Post-Calculus-Reform. *Opening Plenary for Topic Group 12: Calculus, 10th International Congress of Mathematics Education*. Copenhagen, Denmark.

Principles and Standards for School Mathematics. (2000). The National Council of Teachers of Mathematics Inc.

Phillips, L. M., & Norris, S. P., & Macnab, J. S. (2010). *Visualization in Mathematics, Reading and Science Education*. The University of Reading: UK: Springer.

Reyhani, E. (2006). Nature of spatial ability. *Roshd Journal of Mathematics Education*, 85, 27-35.

Reyhani, E., & Haji Babaee, J., & Arabzadeh, R.)2011). Effect of visualization-based teaching approach on problem solving ability of 8th grade students. *Journal of Educational Innovation,* 38.

Rivera, F.D. (2011). *Toward a Visually-Oriented School Mathematics Curriculum*. London: Springer.

Segenchuk, S. (2011). The Role of Visualization in Education. Retrieved from http://web.cs.wpi.edu/~matt/courses/cs563/talks/education/IEindex.html.

Tall, D. O., Editor. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. O. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. Rio de Janeiro, Brasil: *First Coloquio no História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, 1, 1-28.

Tall, D. O. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23, 29-33.

Tall, D. O. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings from the 28th Conference of PME*, 281–288; Bergen, Norway.

Tall, D. O. (2007). Embodiment, Symbolism and Formalism in undergraduate Mathematics Education. *Research in Undergraduate Mathematics Education*, Feb: 22–27.